Geometria projectiva

Aniol Garcia i Serrano

February 2020

0.1 Intro

Definició 1
Un espai projectiu sobre un cos k de dimensió n és una terna formada per:

1. *Un conjunt $\mathbb{P}$ (els elements del qual s'anomenen punts)*
2. *Un espai vectorial E sobre k de dimensió $n+1$*
3. *Una aplicació exhaustiva $\pi\colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ tal que $\pi(v) = \pi(w) \iff v = \lambda w$, per a alguna $\lambda \in k$.*

A un espai projectiu $(\mathbb{P}, E, \pi)$, l'anomenarem comunament $\mathbb{P}$. $\pi(v) = p \overset{notació}{\iff} p = [v]$ i diem que p és representat per v o que v representa a p.

Definició 2
$L \subset \mathbb{P}$ s'anomena varietat lineal $\iff L = \pi(F \setminus \{0\}) := [F]$, anb $F \subset E$ un subespai.

Proposició 1
Si $L = [F]$, aleshores $F \setminus \{0\} = \pi^{-1}(L)$ i, per tant, L determina F.

Demostració.

$\boxed{\subset}$ $v \in F \setminus \{0\} \overset{L=\pi(F\setminus\{0\})}{\Longrightarrow} \pi(v) \in L \iff v \in \pi^{-1}(L)$.

$\boxed{\supset}$ $v \in \pi^{-1}(L) \iff \pi(v) \in L \iff \exists w \in F \| \pi(w) = \pi(v) \implies v = \lambda w \implies v \in F$.

$\square$

Definició 3
$dim\, L = dim\, F - 1$

Observació 1
L'aplicació

$$\begin{aligned} &Sub_{d+1}(E) \longrightarrow V.Lin_d(\mathbb{P}_n) \\ &F \longmapsto [F] \end{aligned}$$

és bijectiva per definició de varietat lineal i la proposició anterior.

Observació 2
Si $L = [F]$ varietat lineal de dimensió $d \geq 1$, aleshores $(L, F, \pi_{|F-\{0\}})$ és espai projectiu de dimensió d.

0.1.1 Incidència de varietats lineals

En tota aquesta secció suposarem que $L_1 = [F_1]$ i que $L_2 = [F_2]$

Proposició 2
$L_1 \subset L_2 \iff F_1 \subset F_2$

Demostració.

$\boxed{\implies}$: Agafem $v \in F_1$. Si $v = 0$, aleshores $v \in F_2$. Si $v \neq 0$, aleshores $[v] \in L_1$, $[v] \in L_2 \implies v \in F_2$.

$\boxed{\impliedby}$: $F_1 \subset F_2 \implies F_1 \setminus \{0\} \subset F_2 \setminus \{0\}$, aleshores $L_1 = \pi(F_1 \setminus \{0\}) \subset \pi(F_2 \setminus \{0\}) = L_2$

$\square$

Proposició 3
$L_1 \cap L_2 = [F_1 \cap F_2]$

Demostració.
Volem veure que $L_1 \cap L_2 = \pi(F_1 \cap F_2) \setminus \{0\}$

$\boxed{\implies}$: $p \in L_1 \cap L_2 \implies \begin{cases} p \in L_1 \implies p = [v],\, v \in F_1 \\ p \in L_2 \implies p = [w],\, w \in F_2 \end{cases} \implies \lambda v = w \implies$ $p = [v] = [w] \implies w \in F_1 \implies w \in F_1 \cap F_2 \implies p \in [F_1 \cap F_2]$

$\boxed{\impliedby}$: $p \in \pi((F_1 \cap F_2) \setminus \{0\}) \implies p = [v],\ v \in F_1 \cap F_2 \implies \begin{cases} p = [v], v \in F_1 \implies p \in L_1 \\ p = [v], v \in F_2 \implies p \in L_2 \end{cases} \implies$ $p \in L_1 \cap L_2$

$\square$

Proposició 4
$L_1 \cap L_2 \subset L_i$, $i = 1, 2$. Si T varietat lineal compleix $T \subset L_1$, aleshores $T \subset L_1 \cap L_2$.

Definició 4
$L_1 \vee L_2 = [F_1 + F_2] =$ unció de (suma de, varietat geenrada per L_1 i L_2.

Proposició 5
$L_1 \vee L_2 \supset L_i$, $i = 1, 2$ i si T varietat lineal compleix que $T \supset L_1$ i $T \supset L_2$, aleshores $T \supset L_1 \cup L_2$.

Demostració.
Per àlgebra lineal, $F_1 + F_2 \supset F_1 \implies L1 \vee L_2 = [F_1 + F_2] \supset [F_1] = L_1$. Ídem per F_2 i L_2. $T = [F]$ i $T \supset L_i \implies F \supset L_i \implies F \supset F_1 + F_2$. Aleshores $T = [F] \supset [F_1 + F_2] = L_1 \vee L_2$. $\square$

Proposició 6 *1. $L_1 \subset L_1 \implies dim L_1 \leq dim L_2$*

2. $\begin{cases} L_1 \subset L_2 \\ dimL_1 = dimL_2 \end{cases} \implies L_1 = L_2$

Demostració.

1. $L_1 \subset L_2 \implies F_1 \subset F_2 \implies dimF_1 \leq dimF_2 \implies dimL_1 \leq dimL_2$
2. $\begin{cases} L_1 \subset L_2 \\ dimL_1 = dimL_2 \end{cases} \implies \begin{cases} F_1 \subset F_2 \\ dimF_1 = dimF_2 \end{cases} \implies F_1 = F_2 \implies L_1 = L_2$

□

Teorema
$dimL_1 + dimL_2 = dimL_1 \cap L_2 + dimL_1 \vee L_2$

Demostració.
Representant les dimensions de les varietats lineals en funció dels seus espais vectorials associats tenim: $dimF_1 - 1 + dimF_2 - 1 = dim(F_1 \cap F_2) - 1 + dim(F_1 + F_2) - 1$, que és la fórmula de Grassman que coneixem de l'àlgebra lineal. □

Proposició 7
$\begin{cases} L_1 = [F_1] \subset L_1' = [F_1'] \\ L_2 = [F_2] \subset L_2' = [F_2'] \end{cases} \implies L_1 \vee L_2 \subset L_1' \vee L_2'$

Demostració.
$\begin{cases} L_1 \subset L_1' \subset L_1' \vee L_2' \\ L_2 \subset L_2' \subset L_1' \vee L_2' \end{cases} \implies L_1 \vee L_2 \subset L_1' \vee L_2'$ □

Lema 1
Sigui L una varietat lineal. Si $p \notin L$, $dimL \vee \{p\} = dimL + 1$

Demostració.
Per Grassman tenim que $dimL + dim\{p\} = dimL \vee \{p\} + dimL \cap \{p\} \implies dimL + 0 = dimL \vee \{p\} - 1$ □

Lema 2
H hiperplà, L varietat lineal tal que $H \not\supset L$. aleshores $dimL \cap H = dimL - 1$.

Demostració.
Per Grassman tenim que $dimL + n - 1 = dimL \cap H + dimL \vee H$. Però $L \vee H$ només pot ser el total, ja que per hipòtesi L no està continguda a l'hiperplà. Així ens queda $dimL + n - 1 = dimL \cap H + n$. □

Definició 5
L_1, L_2 viaretats lineals de $\mathbb{P}_n$ es diuen suplementàries $\iff \begin{cases} L_1 \cap L_1 = \emptyset \\ L_1 \vee L_2 = \mathbb{P}_n \end{cases} \iff$

$\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ F_1 + F_2 = E \end{cases} \iff E = F_1 \oplus F_2$

Lema 3
Dues condicions qualssevol entre les següents

1. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
2. $L_1 \vee L_2 = \mathbb{P}_n$
3. $dim(L_1) + dim(L_2) = n - 1$

impliquen la tercera.

Lema 4
Donats els punts $q_0, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}_n$*:*

1. $dim(q_0 \vee q_1 \vee \ldots \vee q_m) \leq m$
2. $dim(q_0 \vee q_1 \vee \ldots \vee q_m) = m \iff \forall i > 0, q_i \notin (q_0 \vee q_1 \vee \ldots \vee q_{i-1})$

Demostració.
$dim(q_0) = 0$
$dim(q_0 \vee q_1) \leq 1$ (igualtat $\iff q_1 \neq q_0$)
$dim((q_0 \vee q_1) \vee q_2) \leq 2$ (igualtat $\iff q_1 \neq q_2$ i $q_2 \notin q_1 \vee q_0$)
$\vdots$
$dim((q_0 \vee \ldots \vee q_{i-1}) \vee q_1) \leq i$ $\square$

Definició 6
Diem que els punts $q_0, q_1, \ldots, q_m$ *són linealment independents* $\iff dim(q_0 \vee \ldots \vee q_m) = m$

Lema 5
$q_0, q_1, \ldots, q_m$ *són independents* $\iff \forall i > 0, q_i \notin q_0 \vee q_1 \vee \ldots \vee q_{i-1}$

Lema 6
Si $q_i = [v_i]$, $i = 0, \ldots, m$, $q_0, q_1, \ldots, q_m$ *independents* $\iff v_0, v_1, \ldots, v_m$ *independents.*

Demostració.
$q_0, q_1, \ldots, q_m$ independents $\iff dim(q_0 \vee q_1 \vee \ldots \vee q_m) = m$. Si $q_i = [v_i]$, tenim que $\{q_i\} = [< v_i >]$. Aleshores, $q_0 \vee \ldots \vee q_m = [< v_0 > + \ldots + < v_m >] = [< v_0, \ldots, v_m >]$ $\square$

Proposició 8
Si $q_0, q_1, \ldots, q_m$ *són independents, tot subconjunt d'aquests punts són també independents.*

Proposició 9
Sigui L *una varietat lineal de dimensió* d*. Siguin* $q_0, \ldots, q_m \in L$ *punts independents. Aleshores*

1. $m \leq d$

2. *$\exists q_{m+1}, \ldots, q_d \in L$ tal que $q_0, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_d$ són independents (i generen L)*

Demostració.

Sigui $q_0 \vee \ldots \vee q_m$ espai projectiu de dimensió m tal que $q_0 \vee \ldots \vee q_m \subset L$, amb $dim(L) = d$. Si $m = d$, ja hem acabat. Si $m < d$, $q_0 \vee \ldots \vee q_m \subsetneq L$. Agafem $q_{m+1} \in L \setminus q_0 \vee \ldots \vee q_m$, de manera que $q_0 \vee \ldots \vee q_m \vee q_{m+1}$. Podem anar repetint aquest procediment fins que el conjunt de punts generin L. $\square$

Definició 7

Un símplex n-dimensional Δ de $\mathbb{P}_n$ és un conjunt de $m+1$ punts $q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{P}_n$ independents (amb $m \leq n$). Una cara d-dimensional de Δ és qualsevol unió $p_{i_0} \vee \ldots \vee p_{i_d}$ de $d+1$ punts d_i disjunts. Comunament anomenarem a una cara de dimensió 0 com a vèrtex, una cara de dimensió 1 una aresta...

Definició 8

Suposem donats espais projectius $(\mathbb{P}_n, E, \pi)$ i $(\bar{\mathbb{P}_m}, \bar{E}, \bar{\pi})$ i un isomorfisme $\phi \colon E \to \bar{E}$ (de manera que $n = m$). Prenem el següent diagrama commutatiu:

$\forall p \in \mathbb{P}_n$, agafem $v \mid [v] = p$ i considerem $[\varphi(v)]$. Observem que agafant $v \neq 0$ i per φ injectiva $\implies$ $\varphi(v) \neq 0$ i podem considerar $[\varphi(v)]$. Observem també que, si agafem $v' \mid [v'] = p$ en lloc de v, aleshores $v' = \lambda v \implies \varphi(v') = \lambda\varphi(v) \implies [\varphi(v')] = [\varphi(v)]$. Per tant, $[\varphi(v)]$ està ben definida i no depèn de la tria de v.

Tenim l'aplicació induïda per φ:

$$
\begin{aligned}
[\varphi] \colon \mathbb{P}_n &\longrightarrow \bar{\mathbb{P}_n} \\
[v] &\longmapsto [\varphi(v)]
\end{aligned}
$$

Definició 9

$[\varphi]$ és la projectivitat definida per φ.

Observació 3

$[\varphi] = [\lambda\varphi]$ $\forall \lambda \neq 0$

Propietats de les projectivitats

1. Sigui $[\varphi] \colon \mathbb{P}_n \longrightarrow \bar{\mathbb{P}_n}$ i $[\psi] \colon \bar{\mathbb{P}_n} \longrightarrow \bar{\bar{\mathbb{P}}}_n$, aleshores $[\psi \circ \varphi] = [\psi] \circ [\varphi]$ ($\implies$ composició de projectivitats és projectivitat)

   Demostració.

   Afegir un diagrama commutatiu enorme $\square$

2. $[Id_E] = Id_{\mathbb{P}_n}$

3. $\begin{cases} [\varphi^{-1}] \circ [\varphi] = Id_{\mathbb{P}_n} \\ [\varphi] \circ [\varphi^{-1}] = Id_{\bar{\mathbb{P}_n}} \end{cases} \implies [\varphi^{-1}]$ inversa de $[\varphi]$. En particular, $[\varphi]$ és bijectiva i la seva inversa és projectivitat

Suposem $L = [F]$ varietat lineal de $\mathbb{P}_n$ i $f = [\varphi] \colon \mathbb{P}_n \longrightarrow \bar{\mathbb{P}_n}$

1. $f(L) = [\varphi(F)]$ (en particular $f(L)$ és varietat lineal de dimensió $= dim(L)$.

   Demostració.

   $\boxed{\subseteq}$: $p \in f(L) \implies p = f(q)$ per a algun $q \in L \implies$ si $q = [v]$, $v \in F \implies \varphi(v) \in \varphi(F)$ i $p = [\varphi(v)] \implies p \in [\varphi(F)]$

   $\boxed{\supseteq}$: $p \in [\varphi(F)]$, $p = [w]$ per a alguna $w \in \varphi(F)$. Sigui $v \mid \varphi(v) = w$. Aleshores $p = [\varphi(v)] = [\varphi]([v]) \in f(L)$

   $\square$

2. $f_{|L} \colon L \longrightarrow f(L)$ és projectivitat (és la projectivitat definida per $[\varphi_{|L}]$.

   Demostració.
   $\forall p = [v] \in L$, $f_{|L}(p) = [\varphi(v)] = [\varphi_{|L}(v)]$ $\square$

3. $L_1 \subset L_2 \implies f(L_1) \subset f(L_2)$

4. $f(L_1 \cap L_2) = f(L_1) \cap f(L_2)$

5. $f(L_1 \vee L_2) = f(L_1) \vee f(L_2)$

   Demostració.

   $\boxed{\subseteq}$: Sigui $p \in f(L_1 \vee L_2) \implies p = f(q)$ per a algun $q \in [v_1 + v_2]$, amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$. $p = [\varphi(v_1 + v_2)] = [\varphi(v_1) + \varphi(v_2)] \in [\varphi(F_1) + \varphi(F_2)] = f(L_1) + f(L_2)$

   $\boxed{\supseteq}$: $p \in f(l_1) \vee f(L_2) \implies p = [w_1 + w_2]$, amb $w_1 \in \varphi(F_1)$ amb $v_1 \in F_1$ i $w_2 \in \varphi(F_2)$ amb $v_2 \in F_2$. Aleshores $p = [\varphi(v_1) + \varphi(v_2)] = [\varphi(v_1 + v_2)] = f([v_1 + v_2])$, $[v_1 + v_2] \in L_1 \vee L_2$

   $\square$

6. $q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{R}_n$ independents $\iff f(p_0), \ldots, f(p_m)$ independents

   Demostració.

   $q_0, \ldots, q_m$ independents $\iff dim(q_0 \vee \ldots \vee q_m) = m \iff dim(f(q_0 \vee \ldots \vee q_m)) = m \iff fim(f(q_0) \vee \ldots \vee f(q_m)) = m \iff f(q_0), \ldots, f(q_m)$ independents $\square$

Definició 10
Anomenem quadrilàter a la figura formada per quatre rectes de $\mathbb{P}_2$, totes concurrents. Anomenem vèrtexs a les interseccions de costats disjunts i diem que dos vèrtex són oposats sii no comparteixen cap costat. Anomenem diagonal a la unió de vèrtexs oposats.

Teorema
Les diagonals no concorrents són els costats d'un triangle anomenat triangle triagonal.

Definició 11
Anomenem quatrivèrtex a un conjunt de quatre punts (vèrtex) no alineats. Els costats són les unions de vèrtexs diferents i diem que els costats són oposats si no comparteixen vèrtexs. Els punts són diagonals si són interseccions de costats oposats.

Teorema (Desargues)
Siguin ABC i $A'B'C'$ triangles de $\mathbb{P}_2$ tals que cap vèrtex d'un triangle és a un costat de l'añtre triangle. Si AA', BB', CC' concurrents, aleshores si $\begin{cases} a = BC, b = AC, c = AB \\ a' = B'C', b'?A'C', c' = A'B' \end{cases} \implies a \cap a'$*,* $b \cap b'$ *i* $c \cap c'$ *són punts alineats.*

Teorema (Pappus)
Siguin A, B, C tres punts alineats i A', B' i C' tres altres punts alineats. Aleshores $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ i $BC' \cap B'C$ estàn també alineats.

0.2 Referències projectives

Definició 12
Una referència projectiva a $\mathbb{P}_n$ és un conjunt ordenat de $n+2$ punts $\Delta = \{p_0, \dots, p_n; A\}$ tal que:

1. $p_0, \dots, p_n$ *independents* ($p_0, \dots, p_n$ *símplex = símplex de la referència)*
2. $\forall i = 0, \dots, n$, $A \notin p_0 \vee \dots \vee \hat{p_i} \vee \dots \vee p_n$.

Definició 13
$e_0, \dots, e_n \in E$ *s'anomena base adaptada a* $\Delta = \{p_0, \dots, p_n; A\}$ *sii els vectors són representants dels vèrtexs i la seva suma representa el punt unitat.*

Lema 7
Tota referència té una base adaptada.

Demostració.
Agafem v_i amb $i = 0, \dots n$ tal que $[v_i] = p_i \implies v_0, \dots, v_n$ base de E. Sigui $v \mid [v] = A$, $v = \lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n$. Necessàriament $\lambda_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n$. Si tinguéssim $\lambda_i = 0$, $v = \lambda_0 v_0 + \dots + \widehat{\lambda_i v_i} + \dots + \lambda_n v_n$, aleshores $A \in p_0 \vee \dots \vee \hat{p_i} \vee \dots \vee p_n$, que co compleix l'apartat (2) de la definició de referència projectiva. Agafant $e_i = \lambda_i v_i$, tenim que $e_i \neq 0$ i $e_0, \dots, e_n$ formen base adaptada. $\square$

Lema 8
Si $e_0, \dots, e_n$ *i* $v_0, \dots, v_n$ *són bases adaptades de* Δ*, aleshores* $\exists \rho \in K \mid e_i = \rho v_i$*;* $\forall i$.

Demostració.

$$\begin{cases} p_i = [e_i] = [v_i] \implies \exists \rho \in K \mid e_i = \rho_i v_i \\ A = [\sum e_i] = [\sum v_i] \implies \exists \rho \in K \mid \sum e_i = \rho \sum v_i \end{cases} \implies \sum \rho_i v_i = \rho \sum v_i \implies$$

$\sum(\rho_i - \rho)v_i = 0 \implies \rho_i - \rho = 0 \ \forall i.$ □

0.3 Coordenades

Agafem $\forall p \in \mathbb{P}_n$ i Δ referència.

Definició 14

$x_0, \ldots, x_n \in K$ són coordenades de p relatives a $\Delta \iff \exists$ base adaptada a δ $e_0, \ldots, e_n \mid p = [x_0 e_0, \ldots, x_n e_n]$ (necessàriament $(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Amb aquesta definició tenim les següents propietats:

- $\forall p \in \mathbb{P}_n$ tenen coordenades i si $x_0, \ldots, x_n$ i $y_0, \ldots, y_n$ són coordenades de p, aleshores $\exists \delta \in K$ de manera que $x_i = \delta y_i \ \forall i$.

  Demostració.

  1. **Tot punt té coordenades:** Agafem $p = [v]$ i $e_0, \ldots, e_n$ base adaptada. Aleshores $v = x_0 e_0, \ldots, x_n e_n$ i $(x_0, \ldots, x_n)$ seràn les coordenades de p.
  2. Sigui $p = [x_0 e_0, \ldots, x_n e_n] = [y_0 v_0, \ldots, y_n v_n]$ amb $e_0, \ldots, e_n$ i $v_0, \ldots, v_n$ bases adaptades. Aleshores $(x_0 e_0, \ldots, x_n e_n) = \lambda(y_0 v_0, \ldots, y_n v_n)$ i $(x_0 e_0, \ldots, x_n e_n) = (x_0 \rho v_0, \ldots, x_n \rho v_n)$ pel lema anterior, de manera que $(\lambda y_0 - \rho x_0) v_0 + \ldots + (\lambda y_n - \rho x_n) v_n \implies \lambda y_i - \rho x_i = 0 \implies \delta = \frac{\lambda}{\rho}$.

  □

- $\forall (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, $\exists! p$ amb coordenades $(x_0, \ldots, x_n)$

  Demostració.

  Mirem primer l'existència: $\exists e_0, \ldots, e_n$ base adaptada tal que $[x_0 e_0, \ldots, x_n e_n]$ té coordenades $x_0, \ldots, x_n$. Comprovem la unicitat: Siguin p, q dos punts de tals que $p = [x_0 e_0, \ldots, x_n e_n]$ i $q = [x_0 v_0, \ldots, x_n v_n]$. Pel lema anterior tenim que $e_i = \rho v_i$. □

Lema 9

Si p té coordenades $x_0, \ldots, x_n$, aleshores $\forall$ base adaptada $v_0, \ldots, v_n$, $p = [x_0 v_0, \ldots, x_n v_n]$.

Demostració.

$p = [x_0 e_0, \ldots, x_n e_n]$ per a alguna base e_i □

0.4 Incidència amb coordenades

Sigui una referència $\delta = (p_0, \dots, p_n, A)$ de $\mathbb{P}_n$. Aleshores, $\forall e_0, \dots, e_n$ base adaptada de δ, $p = [x_0, \dots, x_n] \iff p = [x_0 e_0 + \dots + x_n e_n]$.

0.4.1 Independència de punts

Punts $q_i = [b_i^0, \dots, b_i^n]$, amb $i = 0, \dots, d$ són independents $\iff rg \begin{pmatrix} b_0^0 & \cdots & b_d^0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_0^n & \cdots & b_d^n \end{pmatrix} = d + 1$

0.4.2 Representació de varietats lineals

Equacions paramètriques

Sigui $L = [F]$ varietat lineal de dimensió d, i punts $q_0, \dots, q_d$ independents en L (que generen L). $q_i = [b_i^0, \dots, b_i^d] \iff v_i = (b_i^0, \dots, b_i^d)$ són representants dels q_i i formen base de F. Aleshores $q \in L \iff q = [v]$, amb $v \in F \iff \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \mid v = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d$. És a dir, $q = [x_0, \dots x_d] \in L \iff \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d$ tal que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} b_0^0 \\ \vdots \\ b_0^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_d \begin{pmatrix} b_d^0 \\ \vdots \\ b_d^n \end{pmatrix}$$

D'altra banda, per a punts $[x_0, \dots, x_d]$ donats, per a qualsevol igualtat d'aquestes amb columnes independents generarien una varietat lineal de dimensió d.

Representació implícita de L

Tenim que $q = [v] \in L \iff v \in F$. Suposem $q = [x_0, \dots, x_n]$ i agafem $v = (x_0, \dots, x_n)$. Aleshores $\exists (n-1) - (d-1) = n - d$ equacions homogènies independents. Aeshores $v \in F \iff (x_0, \dots, x_n)$ és solució de les equacions.

$$q \in L \iff v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n \in F \iff rg \begin{pmatrix} b_0^0 & \cdots & b_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^0 & \cdots & b_n^n \\ x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \leq d + 1$$

0.4.3 Càlcul de la unió

Sigui L un espai projectiu i $q_0, \dots, q_d$ punts independents en L que el generen, i sigui L' un altre espai projectiu i $q'_0, \dots, q'_d$ un conjunt de punts independents en L' que el generen. Aleshores $L \vee L' = q_0 \vee \ldots \vee q_d \vee q'_0 \vee \ldots \vee q'_d$. Extreiem de $q_0, \ldots, q_d, q'_0, \ldots, q'_d$ un sistema maximal de equacions i independents i agafem les coordenades com a columnes del sistema.

0.4.4 Càlcul de la intersecció

Per a calcular la intersecció de dues varietats, ajuntem les equacions de les varietats.

0.4.5 Inclusió

$L \subset L' \iff L \vee L' = L' \wedge L \cap L' = L$

0.5 Canvis de referència

Siguin $\Delta = (p_0, \ldots, p_n, A)$ i $\Omega = (q_0, \ldots, q_n, B)$ dues referències de $\mathbb{P}_n$. Tenim $p = [x_0, \ldots, x_n]_\Delta = [y_0, \ldots, y_n]_\Omega$. Com relacionem x's i y's? Suposem els punts de la referència Ω en la referència Δ:

$$q_0 = [\bar{a}_0^0, \ldots, \bar{a}_0^n]_\Delta = [a_0^0, \ldots, a_0^n] \tag{1}$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$q_m = [\bar{a}_n^0, \ldots, \bar{a}_m^n]_\Delta = [a_n^0, \ldots, a_n^n] \tag{3}$$

$$B = [a^0, \ldots, a^n]_\Delta \tag{4}$$

i els escribim de manera que $a^i = \sum_{j=0}^n a_j^i$. Això és possible perquè les equacions que surten de forçar això formen un sistema de cramer. Els representants v_i dels punts adaptats $[a_i^0, \ldots, a_i^n]$ formen una base adaptada a B:

$$v_0 = a_0^0 e_0 + \ldots + a_0^n e_n \tag{5}$$

$$\vdots \tag{6}$$

$$v_n = a_n^0 e_0 + \ldots + a_n^n e_n \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Aleshores el punt p

$$p = [\sum_{i=0}^n y_i v_i] = [\sum_i y_i \sum_j a_i^j e_j] = [\sum_j (\sum_i y_i a_i^j) e_j]$$

, o de manera matricial

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

0.6 Coordenades absolutes

A $\mathbb{P}_1$ amb la referència $\Delta = (p_0, p_1, A)$ considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 &\longrightarrow k \cup \infty \\ p = [x_0, x_1] &\longmapsto \begin{cases} \frac{x_0}{x_1} & x_1 \neq 0 \\ \infty & x_1 = 0 (\iff p = [1, 0]) \end{cases} \end{aligned}$$

0.7 Raó doble

Suposem punts $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$, com a mínim 3 diferents. Agafem una referència $\Delta = (q_1, q_2, A)$. Denotem $q_i = [x_i, y_i]$. Considerem

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

Lema 10
ρ no varia si canviem de coordenades per a cada q_i o conviem de referència.

Demostració.
Sigui $q_i = [x_i, y_i] = [\lambda_i x_i, \lambda_i y_i]$. Aleshores

$$\begin{vmatrix} \lambda_i x_i & \lambda_i y_i \\ \lambda_j x_j & \lambda_j y_j \end{vmatrix} = \lambda_i \lambda_j \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} \implies \frac{\lambda_3 \lambda_1 \begin{vmatrix} \end{vmatrix}}{\lambda_3 \lambda_2 \begin{vmatrix} \end{vmatrix}} : \frac{\lambda_4 \lambda_1 \begin{vmatrix} \end{vmatrix}}{\lambda_4 \lambda_2 \begin{vmatrix} \end{vmatrix}}$$

.

Si canviem de referència:
Agafem la referència Ω tal que $q_i = [\bar{x_i}, \bar{y_i}]_\Omega$. Aleshores

$$M \begin{bmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x_i} & \bar{x_j} \\ \bar{y_i} & \bar{y_j} \end{bmatrix}$$

de manera que

$$det M \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x_i} & \bar{x_j} \\ \bar{y_i} & \bar{y_j} \end{vmatrix}$$

□