Nocions de Teoria de la Mesura

Aniol

February 2020

1 Notació

Considerem l'espai $\mathbb{R}$, els punts $a, b \in \mathbb{R}$, amb $a \leq b$. Aleshores $|a, b|$ és l'interval d'extrems a i b, que pot ser (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ o $[a, b]$. Definim el volum v d'$|a, b|$ com $v(|a, b|) = b - a$, amb $v(\emptyset) = 0$ i $v(\{a\}) = v([a, a]) = 0$. Generalitzant-ho a l'espai $\mathbb{R}^n$, siguin $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, amb $i = 1, \ldots, n$ i $a_i \leq b_i$, podem considerar l'interval $A = |a_1, b_1| \times |a_2, b_2| \times \ldots \times |a_n, b_n|$. Aleshores, $v(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$.

2 Conjunts mesurables i mesura

Sigui $A \in \mathbb{R}^{\ltimes}$. Un primer intent de mesurar un conjunt A és mitjançant l'anomenada mesura exterior d'A,$|A|^*$, definida per

$$|A| * = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k),\ I_k \text{ intervals oberts, } A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

En el cas d'un interval obert I, $|I|^* = v(I)$.

La mesura exterior té les següents propietats:

1. $|\cdot|^*$ està unívocament definida (no depèn de l'ordre dels I_k)
2. La quantitat $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \geq 0$, els valors de tots els elements $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$, I_k intervals oberts, $A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ és ≥ 0, de manera que formen una successió acotada inferiorment pel 0, de manera que aquest ínfim existeix.
3. $|\cdot|^*$ està ben definit.
4. $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} \tilde{I}_k$ tal que $|A|^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(\tilde{I}_k) \leq |A|^* + \epsilon$
5.
   - $|\emptyset|^* = 0$
   - $A \subseteq B \implies |A|^* \leq |B|^*$
   - A finit o numerable $\implies |A|^* = 0$
6. σ subaditivitat: $|\cup_{j=1}^{\infty} A_j|^* \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^*$

Demostració. Tenim que $\forall \epsilon > 0$, $A_j \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}$. Per la propietat 4, tenim que $|A|^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(I_{j,k}) \leq |A_j|^* + \frac{\epsilon}{2^j}$ i que $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} I_{k,j} = \cup_{j,k} I_{k,j}$. Aleshores, amb tot això tenim que $|\cup_{j=1}^{\infty} A_j|^* \leq \sum_{j,k} v(I_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v(I_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(|A|^* + \frac{\epsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} |A|^* + \epsilon$

7. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un interval. Aleshores es compleix que $|I|^* = v(I)$.

   Demostració. Com que $I \subseteq I \subseteq \bar{I}$, per la propietat 5 tenim que $|\mathring{I}|^* \leq |I|^* \leq |\bar{I}|^*$. Com que $\mathring{I}$ és un obert, sabem que $v(\mathring{I}) = |\mathring{I}|^*$.D'altra banda $\forall \epsilon > 0$, J obert tal que $\bar{I} \subset J$, $v(J) \leq v(\bar{I}) + \epsilon$. Llavors, $|\bar{I}|^* \leq |J|^* = v(J) \leq v(I) + \epsilon$.

8. I interval obert, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $I \subseteq A \subseteq \bar{I}$. Aleshores $v(A) = v(I) = |A|^*$

Definició 1
Sigui X un conjunt (agafarem $X = \mathbb{R}^n$ i sigui $\Sigma \subseteq P(X)$. Diem que Σ és una σ àlgebra si:

i) $\in \Sigma$

ii) $E \in \Sigma \implies X \setminus E \in \Sigma$

iii) $E_k \in \Sigma \implies \bigcap_k E_k \in \Sigma$

Una mesura sobre Σ és una aplicació

$$\mu \colon \Sigma \to [0, \infty] \tag{1}$$
$$E \mapsto \mu(E) \tag{2}$$

tal que

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) (Σ-additivitat]) $E_k \in \Sigma$ disjunts dos a dos, llavors $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Definició 2
Un conjunt $E \subseteq \mathbb{R}^n$ és mesurable si $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$|A|^* = |A \cap E|^* + |A \cap E^c|^*$$

Teorema (Carathéodory)
Sigui $\Sigma = (M)(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de conjunts E mesurables a $\mathbb{R}^n$.

1. *$(M)(\mathbb{R}^n)$ és una σ-àlgebra*

2. $$\mu = |\cdot| \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$$
   $$E \longmapsto |E| = |E|^*$$

   és una mesura.

3. *La mesura $|\cdot|$ és completa: si tenim $Z \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ amb $|Z| = 0$ i $Z' \subseteq Z$, llavors també $Z' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $|Z'| = 0$*

- $A, B \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$
- $\begin{cases} A \subseteq B \\ |A| < +\infty \end{cases} \implies |B \setminus A| = |B| - |A|$
- Si $E_k \subseteq E_{k+1}$, $|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k| = \lim_{k\to\infty} |E_k|$
- (Invariància) Sigui $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ i $E + a = \{y \in \mathbb{R}^* \mid \exists x \in E, y = x + a\}$. Tenim que $E + a$ és mesurable i $|E + a| = |E|$ i que $-E = \{-x \mid x \in E\}$ és mesurable i $|-E| = |E|$

2.1 Propietats Topològiques

Són equivalents:

- E mesurable
- $\forall \epsilon > 0, \exists U$ obert i C tancat tals que $C \subseteq E \subseteq U$ i $|U \setminus C| < \epsilon$

Definició 3
Diem que una propietat es compleix gairebé per a tot (gpt, qpt, ae) $x \in X$ si on no es compleix té mesura zero. És a dir, es compleix (P) gpt $\mu(\{$ de no complir-se $(P)\}) = 0$.

3 Funcions Mesurables

Fins ara tenim $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable ($E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$), i volem $f\colon E \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ mesurable.

Proposició 1
Sigui $E\ in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f\colon E \to \bar{\mathbb{R}}$. Per a qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$ són equivalents:

1. $\{x \in E,\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
2. $\{x \in E,\, f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
3. $\{x \in E,\, f(x) < \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha)) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
4. $\{x \in E,\, f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Per a qualsevol $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$, qualsevol de les proposicions anteriors implica que $\{x \in E, f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Definició 4
Una funció $f\colon E \to \bar{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ és mesurable si compleix alguna de les propietats anteriors.

Demostració. $1 \implies 4$: $\{x \in E, f(x) > \alpha\} = E \setminus \{x \in E, f(x) \leq \alpha\}$

$2 \implies 3$: $\{x \in E, f(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in E, f(x) < \alpha\} = E$

$2 \implies 1$: Volem veure que $A = \{x \in E, f(x) > \alpha\} = \cup_{m=1}^{\infty}\{x \in E, f(x) \geq \alpha + \frac{1}{m}\} = \cap B_m$

$\boxed{\subseteq}$: $f(x) > \alpha$, $\exists m$ tal que $f(x) > \alpha + \frac{1}{m}$. $x \in A \implies x \in B_m$ pera a algun $m \implies x \in \cap B_m \implies A \subset \cup B_m$

$\boxed{\supseteq}$: $\forall x \in \cup B_m$ $\exists m$ tal que $x \in B_m \implies f(x) \geq \alpha + \frac{1}{m} > \alpha \implies x \in A$.

$1 \implies 2$: Volem veure que $\phi = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} = \cap_{m=1}^{\infty}\{x \in E \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{m}\} = \cap \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, ja que $\forall m$, $\cap \psi_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{\subseteq}$: Hem de veure que $\phi \subseteq \cap_{m=1}^{\infty}\psi_m$. Aleshores $\forall x \in \phi$, $f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{m}$. Si m, $x \in \psi_m \implies x \in \cap_{m=1}^{\infty}\psi_m$

$\boxed{\supseteq}$: Hem de veure que $\phi \supseteq \cap_{m=1}^{\infty}\psi_m$. Aleshores $\forall x \in \cap_{m=1}^{\infty}\psi_m \implies \forall m$, $f(x) > \alpha - \frac{1}{m} \implies f(x) \geq \alpha \implies x \in \phi$.

1,2,3 o 4 $\implies 5$: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, aleshores tenim que $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$. Aleshores com que els dos conjunts de la intersecció són mesurables (per 2 i 4), la intersecció també serà mesurable. Si $\alpha = +\infty$ seguim el mateix principi: $\{x \in E \mid f(x) = +\infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{x \in E \mid f(x) \geq n\}$, que per 2, són mesurables, de manera que la intersecció de tots també ho és. El procediment per a $\alpha = -\infty$ segueix la mateixa lògica.

Algunes propietats de les funcions mesurables:

a) $f(x) =$ constant és mesurable

b) Les funcions indicador $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ (1 si $x \in A$, 0 en cas contrari) són mesurables $\iff$ A mesurable (si el conjunt sobre el que operen és mesurable).

c) $f(x) = g(x)$ *gpt* $x \in E$ i f mesurable $\implies g$ mesurable.

d) $f(x)$ contínua $\implies f(x)$ mesurable.

Demostració. Sigui $f\colon E \to \bar{\mathbb{R}}$

a) $\{x \in E \mid c > \alpha\} = \begin{cases} \text{ si } c \leq \alpha \\ E \text{ si } c > \alpha \end{cases}$ i , E són mesurables,

b) $\{x \in E \mid \mathbf{1}_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} \text{ si } \alpha \geq 1 \\ A \text{ si } \alpha \in [0,1) \\ E \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \implies \mathbf{1}_A$ mesurable $\iff$ A mesurable.

c) Tenim $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\}$, $Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)$, $Z \in \mathcal{M}$ i $|Z| = 0$. $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} = (\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \cap Z^c) \cup (\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \cap Z)$. Tots són mesurables, per tant, les unions i interseccions també ho són.

d) $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty])$. Com que $f(x)$ contínua i $(\alpha, +\infty]$ obert, $f^{-1}((\alpha, +\infty])$ és també obert i, per tant, mesurable.

Proposició 2
Si f, g són funcions mesurables, aleshores $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{g}$, f^c, $f \vee g$, $f \wedge g$, cf, f^+, f^- també són mesurables.

Proposició 3
Si les funcions f_n són mesurables, aleshores $inf_n f_n$, $sup_n f_n$, $lim f_n$ (mesurables?)

Proposició 4

1. *Si f, g són funcions numerables $\implies$ $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$, f^c, $f \vee g$, $f \vee g$, cf, f^+, f^- són mesurables.*

2. *f_n mesurables $inf_n f_n$, $sup_n f_n$ i $\lim f_n$ mesurables.*

Definició 5
Diem que s és una funció simple o elemental si

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

amb $\alpha_k \in \mathbb{R}$, A_k mesurables disjunts dos a dos. s és mesurable i el límit d'aquest tipus defuncions és mesurable.

Proposició 5
Sigui $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ mesurable, amb $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Aleshores $\exists s_k$ successió de funcions simples creixents que convergeixen cap a f. Per exemple, siguin

$$s_k = \sum_{l=1}^{k2^k} \frac{k-1}{2^k} \mathbf{1}_{E_k^l} + k\mathbf{1}_{F_k}$$

, amb $E_k^l = \{x \in E_l \mid \frac{l-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{l}{2^k}\}$ i $F_k\{x \in E \mid f(x) \geq k\}$.