Càlcul diferencial en diverses variables

Aniol Garcia i Serrano

Setembre 2019

Capítol 1

L'espai $\mathbb{R}^n$

1.1 Introducció

1.1.1 Norma i distància euclidiana

Producte escalar

Definició 1
Sigui $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Aleshores definim el producte escalar* $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$*.*

Aquestes són algunes de les seves propietats:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ i $x \cdot x = 0 \iff x = 0$.
- $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ és lineal.
  $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n \longmapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ és lineal.
  El producte escalar

  $$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

  és lineal.

Norma euclidiana

Capítol 2

Límits i continuïtat

2.1 Límits de funcions de diverses variables

Definició 2
Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ una funció, $l \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de D. Diem que l és límit de la funció f en a ($\lim_{x\to a} f(x)$) quan se satisfan les condicions equivalents següents:

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x \in D$, $0 < ||x-a|| < \delta \implies ||f(x) - l|| < \epsilon$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que* $f((D \setminus \{a\}) \cap B(a,\delta)) \subset B(l,\epsilon)$

c) Si $(x^{(j)}_{j\geq 1}$ *és una successió de* $D \setminus \{a\}$, $x^{(j)} \to a \implies f(x^{(j)}) \to l$

Proposició 1
Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de D, $l = (l_1, \cdots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Si

$$\begin{aligned} f = (f_1, \dots, f_m)\colon D &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \end{aligned}$$

Aleshores

$$l = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall k = 1, \dots m, \lim_{x\to a} f_k(x)$$

Demostració.

$$\begin{aligned} l = \lim_{x\to a} f(x) &\iff \forall (x^{(j)}) \text{ successió de } D \setminus \{a\},\, x^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} l \implies f(x^{(j)}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} l \\ &\iff \forall k = 1, \dots, m,\, \forall (x^{(j)}) \text{ successió de } D \setminus \{a\},\, x^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} l \implies f_k(x^{(j)}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} l_k \\ &\iff \forall k = 1, \dots, m l_k = \lim_{x\to a} f_k(x) \end{aligned}$$

2.1.1 Propietats algebraiques del límits

Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ dues funcions, $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de D, $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, $L = \lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$. Aleshores

a)
$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l + L$$

b)
$$\forall \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to a} f(x) = \lambda l$$

c)
$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot L$$

d)
$$L \neq 0 \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{L}$$

2.1.2 Límits de composicions

$$\left.\begin{array}{ll} A \subset \mathbb{R}^n, & a \in \mathbb{R}^n \text{ punt d'acumulació d'}A \\ & f\colon A \to \mathbb{R}^m \mid \lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^m \\ B \subset \mathbb{R}^m, & b \in \mathbb{R}^n \text{ punt d'acumulació de } B \\ & f\colon B \to \mathbb{R} \mid \lim_{y\to b} g(y) = l \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = l$$

2.1.3 Relació dels límits amb l'ordre

Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, f, g, h funcions, $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de D

a)
$$\left.\begin{array}{l} \exists r > 0 \forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap B(a, r) \mid f(x) \leq g(x) \\ \exists l = \lim_{x\to a} f(x) \ \wedge \ \exists L = \lim_{x\to a} g(x) \end{array}\right\} \implies l \leq L$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} \exists r > 0 \forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap B(a, r) \mid f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \exists l = \lim_{x\to a} f(x) \ \wedge \ \exists L = \lim_{x\to a} g(x) \ \wedge \ L = l \end{array}\right\} \implies \exists \lim_{x\to a} g(x) = l = L$$

c) Sigui $l \in \mathbb{R}$, $\exists r > 0\ \forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap B(a, r)\ \ |f(x) - l| < \varphi(x)$, amb φ una funció tal que $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \implies \lim_{x\to a} f(x) = l$

Aquesra versió ñes un cas particular de l'anterior: $|f(x) - l| \leq \varphi(x) \iff -\varphi(x) \leq \varphi(x) - l \leq \varphi(x) \iff l - \varphi(x) \leq f(x) < l + \varphi(x)$

2.1.4 Límits sobre subconjunts

Definició 3
Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset D$ un conjunt, $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de E ($\implies$ a és punt d'acumulació de D). El límit d'f sobre E és simplement

$$\lim_{x\to a} f \restriction_E (x)$$

i s'escriu com a

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$$

Proposició 2

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \implies \exists \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = l$$

Podem utilitzar aquesta proposició per trobar candidats a límit (si proposem una restricció, el límit calculat és candidat a ser límit de la funció) i per a provar que el límit no existeix (proposant restriccions i veient que els límits són diferents).

Proposició 3
Sigui $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in \mathbb{R}^n$, $\exists r > 0$ $(D \setminus \{a\}) \cap B(a,r) = E_1 \cap \ldots \cap E_N$ on a és punt d'acumulació dels E_j's, Aleshores

$$l = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall j = 1, \ldots, N \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = l$$

Això no és cert per a infinits E_j's.

2.2 Continuitat

2.2.1 Funcions contínues en un punt

Definició 4
Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ una funció i $a \in D$ un punt. Diem que f és contínua en a quan compleix alguna de les quatre condicions equivalents següents:

a) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall X \in D, ||x-a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$

b) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ *tal que* $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$

c) $\forall \{x^{(j)}\}_{j\geq 1}$ *successió de punts de D,* $x^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x^{(j)}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$

d) a és un punt aïllat de D o bé a és un punt d'acumulació de D i $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Direm que f és contínua en $D \iff \forall a \in D\, f$ és contínua.

Proposició 4
Sigui $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$. f és contínua $\iff$ $f_1, \ldots, f_m$ són contínues.

2.2.2 Propietats algebraiques de la continuitat

Siguin $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ funcions contínues en $a \in D$. Aleshores:

1. $f + g$ és contínua en a
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf és contínua en a
3. $f \cdot g$ és contínua en a
4. $\frac{f}{g}$ és contínua en a si $g(x) \neq 0 \forall x \in D$

Proposició 5

$$\left.\begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n,\ f\colon D \to \mathbb{R}^m \textit{ contínua en } a \in D \\ E \subset \mathbb{R}^m,\ f(D) \subset E,\ g\colon E \to \mathbb{R} \textit{ contínua en } f(a) \end{array}\right\} \implies g \circ f\colon D \to \mathbb{R} \textit{ és contínua}$$

2.2.3 Funcions contínues en un conjunt

Teorema 1
Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ una funció. Aleshores són equivalents

(i) f *és contínua*

(ii) $\forall V$ *obert de* $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(V) = D \cap U$ *on* U *és un obert de* $\mathbb{R}^n$

(iii) $\forall C$ *tancat de* $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(C) = D \cap F$ *on* F *és un tancat de* $\mathbb{R}^n$

Corol·lari .1
Sigui $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un homeomorfisme, és a dir, f és contñinua, bijectiva i f^{-1} és contínua. Sigui $A \in \mathbb{R}^n$. Aleshores:

a) A *obert en* $\mathbb{R}^n \iff f(A)$ *és obert en* $\mathbb{R}^m$

b) A *tancat en* $\mathbb{R}^n \iff f(A)$ *és tancat en* $\mathbb{R}^m$

c) $f(\mathring{A}) = \overset{\circ}{f(A)}$, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, $f(\partial A) = \partial f(A)$

Teorema 2
Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacte i $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ una funció contínua, aleshores $f(K)$ és un compacte.

Demostració. Volem provar que cada successió $\{y^{(j)}\}_{j\geq 1}$ de $f(K)$ té alguna successió parcial convergent cap a un punt de $f(K)$. $y^(j) \in f(K) \implies y^{(j)} = f(x^(j))$ on $x^{(j)} \in K$, $\{x^{(j)}\}_{j\geq 1}$ és successió del compacte K.

$$\left.\begin{array}{l} \exists \{x^{(j_k)}\}_{k\geq 1} \text{ una successió parcial de } K \\ \exists x \in K \end{array}\right\} x^{(j_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{(j_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \\ f \text{ contínua} \end{array}\right\} \implies f(x^{(j_k)}) = y^{(j_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \in f(K) \implies$$

$\implies \{y^{(j_k)}\}_{k\geq 1}$ és una successió parcial de $\{y^{(j)}\}_{j\geq 1}$, $f(x) \in f(K)$, $y^{(j_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$

Teorema de Weierstrass

Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacte i $f\colon K \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores existeixen punts $x_0, x_1 \in K$ tals que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in K$.

Demostració.

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ compacte} \\ f\colon K \to \mathbb{R} \text{ contínua} \end{array}\right\} \implies \underset{\text{és cpcte.}}{f(K) \subset \mathbb{R}} \implies \begin{cases} f(K) \text{ acotat en } \mathbb{R} \implies f(K) \text{ acotat sup. inf. en } \mathbb{R} \\ f(K) \text{ tancat en } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\implies \exists M = sup f(K) \in \mathbb{R},\, \exists m = inf f(K) \in \mathbb{R} \implies M, m \in \overline{f(K)} = f(K) \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{l} \exists x_0 \in K \mid f(x_0) = m \\ \exists x_1 \in K \mid f(x_1) = M \end{array}\right\} \implies f(x_0) = m \leq f(x) \leq M = f(x_1),\ \forall x \in K$$

La imatge contínua d'un obert no sempre és un obert, de la mateixa maner que la imatge contínua d'un tancat no sempre és un tancat i que la imatge contínua d'un compacte no sempre és compacte.

Capítol 3

Diferenciabilitat

3.1 Derivades direccionals i derivades parcials

Definició 5
Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert, $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in U$ i $u \in \mathbb{R}^n$ un vector unitari. $a \in U \implies \exists r > 0\colon B(a,r) \subset U \implies a + tu \in B(a,r) \subset U$ $\forall t \in (-r,r)$. $t \in (-r,r) \implies f(a+tu) \in \mathbb{R}$. Laa ***derivada direccional de*** *f* ***en*** *a* ***segons la direcció del vector*** *u és $D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} f(a+tu) \mid_{t\to 0}$ quan el límit existeix i és finit ($D_u f(a) \in \mathbb{R}$). Si $u = (u_1, \dots, u_n)$ tal que $u_i = 1$ i $u_j = 0 \forall j \neq i$ (anomenarem aquest vector e_i), $D_u f(a)$ es diu la derivada parcial de f en el punt a respecte la i-èssima variable i es denota per*

$$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,n)}{t} =$$
$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,\dots,x_i,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{x_i - a_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1,\dots,x_i,\dots a_n) \mid_{x_i = a_i}$$

.

3.1.1 Funcions escalars diferenciables

Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval no trivial, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Diem que F és derivable en $a \iff \exists (f'(a) =) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R} \iff \exists m (= f'(a)) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m = 0 \iff \exists m \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-m(x-a)}{x-a} = 0 \iff \left| \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-m(x-a)}{x-a} = 0 \right| \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-m(x-a)}{|x-a|} = 0 \iff \exists L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{|x-a|} = 0$ ($L(x) = f'(a)x$).

Definició 6
Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in U$. Diem que f és diferenciable en a sie existeix una aplicació lineal $L\colon\ \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{|x-a|} = 0$.

Si $n = 1$, diferenciable en $a \implies$ derivable en a.

Si f és diferenciable en a, l'aplicació lineal L que compleix la definició és única: f diferenciable en $a \implies \forall u \in \mathbb{R}^n$ unitari $\exists D_u f(a) = L(u)$ lineal $(L(0) = 0,\ v \neq 0, v = \|v\|u, Lv = \|v\|Lu)$ Sigui $E_a = \{a + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$. Aleshores

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E_a}} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - L(tu)}{\|tu\|} \iff 0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - tL(u)}{|t|}$$
$$\iff 0 = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - tL(u)}{|t|} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - tL(u)}{t} \right|$$
$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - L(u) \right| \iff 0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - L(u)$$
$$\iff \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = L(u) = D_u f(a)$$

L'aplicació lineal L tal que es compleix la definició de funció diferenciable en a és única i es diu la diferencial de f en a, i la denotem $D_u f(a) = d_a f(u)$.

$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ Df(a)(v) = Df(a)(v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n) = v_1 Df(a)(e_1) + \ldots + v_n Df(a)(e_n)$, amb $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Falten coses del que tens al mail!

3.1.2 Funcions de classe $\mathcal{C}^1$

Definició 7

Sugui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f \colon U \to \mathbb{R}$ funció. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^1$ en U quan per a cada $x \in U$ i $j = 1, \ldots, n$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ i les funcions $\frac{\partial f}{\partial} : U \to \mathbb{R}$ són contínues per $j = 1, \ldots, n$. El conjunt de totes les funcions de classe $\mathcal{C}^1$ en U es denota per $\mathcal{C}^1(U)$. Així, f és de classe $\mathcal{C}^1 \iff f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Teorema 3

$f \in \mathcal{C}^1(U) f$ és diferenciable en U.

Propietats algebraiques de les funcions de classe $\mathcal{C}^1$

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f, g \colon U \to \mathbb{R}$

- $f, g \in \mathcal{C}^1(U) \implies f + g, f\Delta g \in \mathcal{C}^1(U)$
- $f, g \in \mathcal{C}^1(U),\ \forall x \in U, g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{C}^1(U)$

3.1.3 Funcions vectorials diferenciables

Definició 8

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$. Diem que f és diferenciable en $a \iff \exists L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

$$L_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \textit{ lineal} \mid lim_{x\to a} \frac{f_j(x) - f(a) - L_j(x-a)}{\|x-a\|} = 0,\ \forall j = 1,\dots,m \iff \begin{cases} \forall j = 1,\dots,m, f_j \textit{ diff en } a \\ Df_j(a) = L_j \end{cases}$$

L es diu diferencial de f en a i es denota per $Df(a)$.

Si $f = (f_1,\dots,f_m)$ és diferenciable en $a \iff f_1,\dots,f_m$ són diferenciables en a. En tal cas, $Df(a) = (Df_1(a),\dots Df_m(a))$.

Definició 9

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))$. f és de classe $(C)^1$ en U quan $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^m)$ denota el conjunt de totes les funcions $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ que són de classe $(C)^1$. Si $f, g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^m)$, la suma i el producte també.

Definició 10

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ és diferenciable en $a \in U$, la matriu de $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en les corresponents bases canòniques es diu la matriu jacobiana de f en a,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$,$f : U \to \mathbb{R}^m$ funció tal que $x \mapsto f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))$, $a \in U$. Si $f(U) \subset V$, definim $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ tal que $y \mapsto g(y) = (g_1(y),\dots,g_l(y))$. Si f és diferenciable en a i g és diferenciable en $f(a)$, aleshores $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^l$ és diferenciable en a i $D(g\circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$, que efectivament està ben definida:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{R}^n \overset{Df(a)}{\longrightarrow} \mathbb{R}^m \text{ lineal} \\ \mathbb{R}^m \overset{Dg(f(a))}{\longrightarrow} \mathbb{R}^l \text{ lineal} \end{aligned}\right\} \implies \mathbb{R}^n \overset{Dg(f(a))\circ Df(a)}{\longrightarrow} \mathbb{R}^l \text{ lineal}$$

La matriu jacobiana de $g \circ f$ en a és el producte de les matrius jacobianes de f en a i de g en $f(a)$:

$$\left(\frac{\partial (g\circ f)a}{\partial x_i}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,l}} = \left(\frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a))\right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots l}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)$$

Corol·lari .2
$U \subset \mathbb{R}^n$ obert $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable (de classe $\mathcal{C}^1$) i $f(U) \subset V$ amb V obert de $\mathbb{R}^m$, $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ diferenciable $\implies$ $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^l$ diferenciable.

3.1.4 Derivades parcials d'ordre superior

$U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $a \in U$.

$$D_j f(a) = f_{x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

Suposem que $\exists r > 0$ tal que $B(a,r) \subset U$ i $\forall x \in B(a,r)$, $\exists D_j f(x)$ tal que $D_j f\colon B(a,r) \to \mathbb{R}$. Aleshores

$$\exists D_i(D_j f)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{D_j f(a+te_i) - D_j f(a)}{t}$$

amb

$$D_i(D_j f)(a) = D_{i,j} f(a) = f_{x_i,x_j}(a) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & i \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} & i = j \end{cases}$$

Si $\exists r > 0 \mid B(a,r) \subset U$, $\forall x \in B(a,r)$ $\exists D_{i,j} f(x)$, $D_{i,j}\colon B(a,r) \to \mathbb{R}$

$$\exists D_k(D_{i,j} f)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{D_{i,j} f(a+te_i) - D_{i,j} f(a)}{t}$$

amb

$$D_k(D_{i,j} f)(a) = D_{k,i,j} f(a) = f_{x_k,x_i,x_j}(a) = \begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(a) & k \neq i \wedge k \neq j \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j^2}(a) & k \neq i \wedge i = j \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a) & k = i \wedge i \neq j \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}(a) & k = i = j \end{cases}$$

3.1.5 Funcions de classe C^m

Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un obert, $f\colon U \to \mathbb{R}$

Definició 11
f és de classe $\mathcal{C}^1$ en U ($f \in \mathcal{C}^1(U)$) $\iff$ f té totes les derivades parcials de primer ordre en U i aquestes són contínues en U.

Definició 12
Per a $m \geq 2$, diem que f és de classe $\mathcal{C}^m$ en U ($f \in \mathcal{C}^m(U)$) $\iff$ f admet totes les derivades parcials d'ordre m en U i questes funcions són contínues en U

Tenim que $\mathcal{C}^{m+1}(U) \subset \mathcal{C}^m(U) \subset \ldots \subset \mathcal{C}(U)$, i aleshores que $f \in \mathcal{C}^{m+1}(U)$ admet totes les derivades parcials de qualsevol ordre en U i aquestes funcions són contínues en U.

Propietats de les funcions de classe $\mathcal{C}^m$

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un obert, aleshores:

1. $f, g \in \mathcal{C}^m(U) \implies f + g, fg \in \mathcal{C}^m$.
2. $f, g \in \mathcal{C}^m(U)$, $\forall x \in U$, $g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g}\mathcal{C}^m$
3. $f \in \mathcal{C}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ obert. Sigui $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{C}^m(V)$ amb $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}^m(V)$ tal que $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ i $g(V) \subset U$. Aleshores, $f \circ g \in \mathcal{C}^m(V)$.

   Teorema 4
   $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f \in \mathcal{C}^2(U) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, y)$, $\forall (x, y) \in U$, $1 \leq i < j \leq n$.

4. Si $f \in \mathcal{C}^m(U)$, $2 \leq m < \infty$, $2 \leq k \leq m$ i σ és una permutació de $\{1, \ldots, k\}$, aleshores
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \ldots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}$$
   En particular, les derivades parcials de f d'ordre k amb $1 \leq k \leq m$ en el punt $x \in U$ són les de la forma
$$D^(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$
   on $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = k$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$)

3.1.6 Fòrmula de Taylor

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert, $a \in U$ i $f \in \mathcal{C}^m(U)$, $1 \leq m < \infty$. Aleshoresel polinomi de Taylor de f en el punt a d'ordre m és

$$P_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a)(x - a)^\alpha$$

on $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $(x - a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$. Es compleix que $f(x) = P_m(x) + \mathcal{O}(\|x - a\|^m)$ quan $x \to a$, és a dir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_m(x)}{\|x - a\|^m} = 0$$

Recíprocament, si P és un polinomi de grau $\leq m$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = P_m(x) + \mathcal{O}(\|x - a\|^m)$, aleshores P és el polinomi de Taylor de f en a de grau m.

Per exemple, el polinomi de Taylor de segon ordre d'una funció f en el punt a és
$$P_2(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{1}{2} H_{f,a}(x - a)$$

amb $H_{f,a}$ (la matriu Hessiana de f en a) la matriu de segones derivades de la funció

$$H_{i.j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

(També la podem definir en termes de la Jacobiana de f en a com $H(f(x)) = J(\nabla f(x))^T$).

Sigui $f \in \mathcal{C}^m(U)$, $1 \leq m < \infty$, U obert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$. Si P és un polinomi en $\mathbb{R}^n$ de grau $\leq m$ que compleixi

$$f(x) = P(x) + \mathcal{o}(\|x - a\|^m), \ \ (x \to a)$$

aleshores P és el polinomi de Taylor de f en a d'ordre m (TL;DR: El polinomi de Taylor és únic).

Definició 13 (Notació $\mathcal{o}$ petita de Landau)
Siguin f, g funcions reals o escalars diferents en un entorn obert U de $a \in \mathbb{R}^n$, $f, g \colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \mathcal{o}(g(x)), \ (x \to a) \iff f(x) = g(x)h(x) \ \textit{amb} \ \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

. Intuïtivament, diem que $f(x) = \mathcal{o}(g(x))$ quan $f(x)$ és negligible en comparació amb $g(x)$.

Difeomorfismes entre oberts de $\mathbb{R}^n$

Siguin U, V oberts de $\mathbb{R}^n$. Un difeomorfisme entre U i V és una aplicació $f \colon U \to V$ bijectiva, diferenciable i amb inversa diferenciable. Si $1 \leq k \leq \infty$, un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre U i V és una aplicació $f \colon U \to V$ bijectiva de classe $\mathcal{C}^k$ amb inversa de classe $\mathcal{C}^k$.

$f \colon U \to V$ difeomorfisme $\implies$ $Id_U = f^{-1} \circ f \overset{cadena}{\implies} \forall a \in U, Id_{\mathbb{R}} = DId_U(a) = Df^{-1}(f(a)) \circ Df(a)$

$$\left.\begin{array}{l} Df(a), Df^{-1}(f(a)) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lineals} \\ Df^{-1}(f(a)) \circ Df(a) = Id_{\mathbb{R}^n} \end{array}\right\} \implies Df(a) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ isomorfisme lineal } \implies detDf(a) \neq 0 \ \forall a \in U$$

Teorema de la funció inversa

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$ i $a \in U$.Si $Df(a) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un isomorfisme lineal o equivalentment $detDf(a) \neq 0$, aleshores f és un difeomorfisme lineal de classe $\mathcal{C}^k$ en a i existeix un entorn obert $V \subset U$ de a tal que $f(V)$ és un obert en $\mathbb{R}^n$ i $f \upharpoonright V \colon V \to f(V)$ és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$ ($f \upharpoonright V \colon V \to f(V)$ és bijectiva i $f^{-1} \colon f(V) \to V$ és de classe $\mathcal{C}^k$).

Corol·lari .3 (Teorema de l'aplicació oberta)
Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un obert i $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $detDf(a) \neq 0 \ \ \forall a \in U, llavorsfésunaplicacióobertai.e.si \underset{obert}{A} \subset U$ aleshores $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ és obert.

Corol·lari .4
Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un obert i $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ una funció de classe $\mathcal{C}^k$, $1 \le k \le \infty$, aleshores són equivalents:

i) $V = f(U)$ és obert i f és difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre U i V.

ii) $detDf(a) \neq 0$ per a tot $a \in U$ i f és injectiva.

Aleshores

$$f \text{ difeomorfisme local de classe } \mathcal{C}^k \text{ en } a \iff detDf(a) = 0$$

amb la implicació d'esquerra a dreta donada per la regla de la cadena i de dreta a esquerra donada pel teorema de la funció inversa.

Teorema de Rouché-Frobenius

Considerem el sistema de m equacions lineals homogènies amb $n+m$ incògnites següent:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \alpha_{1,1}x_1 + \ldots \alpha_{1,n}x_n + \beta_{1,1}y_1 + \ldots + \beta_{1,m}y_m = 0 \\ \vdots \\ f_m(x,y) = \alpha_{m,1}x_1 + \ldots \alpha_{m,n}x_n + \beta_{m,1}y_1 + \ldots + \beta_{m,m}y_m = 0 \end{cases}$$

Les solucions del sistema anterior s'expressen com a

$$y_j = g_j(x_1, \ldots, x_n), \ \ (1 \le j \le m)$$

on $g_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és lineal, si i només si

$$det(B_{j,k})_{j,k=1}^m = det\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_n}(0)\right)_{j,k=1}^m = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_j)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(0) \neq 0$$

-

Teorema de la funció implícita

Sigui $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunt obert, $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_m(x,y))$ una funció de classe $\mathcal{C}^k$, amb $1 \le k \le \infty$. Si un punt $(a,b) \in U$ compleix $f(a,b) = 0$ i $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_j)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(a,b) = det\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_n}(a,b)\right)_{j,k=1}^m \neq 0$. Aleshores $\exists W \subset U$ entorn obert de (a,b), $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de a i una funció $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ tal que

$$\{(x,y) \in W \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}$$

és a dir els zeros de f en W són els punts de la gràfica de g, o equivalentment, en un llenguatge més clàssic, les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

en W són els punts de la forma $(x_1,\ldots,x_n,g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n)) = 0$ amb $(x_1,\ldots,x_n)\in V$

Teorema dels multiplicadors de Lagrange

Sigui $U\subset\mathbb{R}^n$ un obert i $f\colon U\to\mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^1$. Sigui $E=\{x\in U \mid g_1(x)=\ldots=g_m(x)=0\}$ amb $1\le m\le n$ i $g=(g_1,\ldots,g_n)\colon U\to\mathbb{R}^m$ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $rang D_g(x)=m$ per a cada $x\in E$ (és a dir, $\nabla g_1(x),\ldots,\nabla g_m(x)$ són linealment dependents per a tot $x\in E$). Si $f\restriction_E$ té un entorn local en $p\in E$, aleshores existeixen nombres reals $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ (anomenats multiplicadors de Lagrange) tals que $\nabla f(p)=\lambda_1\nabla g_1(p)+\ldots+\lambda_m\nabla g_m(p)$.

Distància a un conjunt de $\mathbb{R}^n$

Sigui $E\subset\mathbb{R}^n$, $E\neq$ i un punt $a\in\mathbb{R}^n$. Definim la distància entre el punt a i el conjunt E com $d(a,E)=\inf_{x\in E} d(a,x)\in$

Observem que l'ínfim no sempre és un mínim (considereu, per exemple la distància entre un obert i un punt exterior a aquest).

Teorema 5
Si E és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^n$ i $a\in\mathbb{R}^n$, aleshores $\exists$ un punt $y\in E$ tal que $d(a,E)=d(a,y)$.

Proposició 6

E acotat : E tancat i acotat $\implies$ E compacte. Considerem la funció $f_a\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\|x-a\|$. Observem que aquesta funció és contínua. Amb aquestes dues consideracions i pel teorema de Weistrass, tenim que $\exists y\in E$ tal que $f(y)\le f(x)$, $\forall x\in E$. Aleshores $d(y,a)=\|y-a\|\le\|x-a\|=d(x,a)$.

E no acotat : Sigui $x_0\in E$, $a\notin E$, tenim que $\|x_0-a\|>0$. Definim ara $R=1+\|x_0-a\|>0$ i $K=E\cap B'(a,R)$. Com que E i $B'(a,R)$ són tancats K també ho és, i com que $B'(a,R)$ és acotat, forçosament K també ho serà. Així tenim que $d(a,E)=d(a,K)$, i com que K és tancat i acotat, podem aplicar el primer cas, obtenint que $\exists y\in K\subset E$ tal que $d(a,K)=d(a,y)$.